

Semnul funcției, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Teorema: Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

1. Dacă $\Delta > 0$, f are semnul lui a pe $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ și semn contrar semnului lui a pe (x_1, x_2) .

Tabelul de semn pentru $\Delta > 0$ este:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	semnul lui a	0	semn contrar lui a	0

2. Dacă $\Delta = 0$, f are semnul lui a pe $\mathbb{R} / \{-\frac{b}{2a}\}$.

Tabelul de semn pentru $\Delta = 0$ este:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	semnul lui a	0	semnul lui a

3. Dacă $\Delta < 0$, f are semnul lui a pe \mathbb{R} .

4. Tabelul de semn pentru $\Delta < 0$ este:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	semnul lui a	

Exercitii rezolvate

1. Sa se determine semnul $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x) = x^2 + 9x + 20$

b) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

c) $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

Rezolvare

a) $x^2 + 9x + 20 = 0 \rightarrow a = 1, b = 9, c = 20; \Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 \rightarrow \Delta = 1$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \rightarrow x_1 = -4 \text{ și } x_2 = -5$

x	$-\infty$	-5	-4	$+\infty$
$f(x)$	+	+	+	+

b) $x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow a = 1, b = -6, c = 9; \Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 \rightarrow \Delta = 0$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} \rightarrow x_1 = x_2 = 3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	+	+	+

c) $2x^2 - 3x + 5 = 0 \rightarrow a = 2, b = -3, c = 5; \Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 \rightarrow \Delta = -31 < 0$

x	-∞		+∞
f(x)	+ + + + + + + + + + + +		

Inecuatii de forma $ax^2 + bx + c < 0$ ($>, \leq, \geq$), $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

O aplicatie a semnului functiei de gradul al doilea o reprezinta rezolvarea unor inecuatii de forma $ax^2 + bx + c < 0$ ($>$, \leq , \geq), $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Rezolvarea unor astfel de inecuatii revine la a determina multimea elementelor $x \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x) \leq 0$ sau $f(x) \geq 0$ sau $f(x) < 0$ sau $f(x) > 0$. Pentru aceasta se studiaza semnul functiei f , dupa care se alege solutia inecuatiei.

Exercitii rezolvate

1. Sa se rezolve inecuatiiile:

a) $4x^2 - 19x + 12 \leq 0$

b) $-2x^2 + 4x + 6 \geq 0$

Rezolvare

a) $4x^2 - 19x + 12 = 0 \rightarrow a=4, b=-19, c=12; \Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (-19)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 12 \rightarrow \Delta = 169$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-19) \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 4} \rightarrow x_1 = 4 \text{ si } x_2 = \frac{3}{4}$$

x	-∞	4	$\frac{3}{4}$	+∞
$f(x) = 4x^2 - 19x + 12$	+ + + 0 - - - 0 + + + + + +			

Rezulta ca multimea solutiilor inecuatiei este $S = [4, \frac{3}{4}]$

b) $-2x^2 + 4x + 6 = 0 \rightarrow a = -2, b = +4, c = 6; \Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 4^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 6 \rightarrow \Delta = 64$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot (-2)} \rightarrow x_1 = -1 \text{ si } x_2 = 3.$$

x	-∞	-1	3	+∞
$f(x) = -2x^2 + 4x + 6$	- - - - 0 + + + 0 - - - -			

Rezulta ca multimea solutiilor inecuatiei este $S = [-1, 3]$

Exercitii nerezolvate(tema)

1. Sa se determine semnul $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, daca:

a) $f(x) = x^2 + 6x + 5$

b) $f(x) = x^2 - 10x + 25$

c) $f(x) = x^2 + 7x + 30$

1. Sa se rezolve inecuatiiile:

a) $-7x^2 + 3x - 1 < 0$

b) $x^2 - 12x + 36 \geq 0$

c) $x^2 - 9x + 20 \leq 0$

